DOI: https://doi.org/10.54338/18294200-2024.3-06

ГРУНТЫ И ФУНДАМЕНТЫ, ПОДЗЕМНЫЕ СООРУЖЕНИЯ

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СОСТАВНОЙ ПЛОСКОСТИ СО СМЕШАННЫМИ УСЛОВИЯМИ

Левон Арсенович Арутюнян[1], Ваге Гришаевич Закарян[1*], Ангин Викторовна Мартиросян[2]

[1]*Институт механики НАН, г. Ереван, РА,*

[2]*Национальный университет архитектуры и строительства Армении, г. Ереван, РА,*

[*]*vahe-zaqaryan@mail.ru*

Рассматривается плоская контактная задача теории упругости для составной плоскости, состоящей из двух плоскостей с различными упругими характеристиками, когда составная плоскость по линии контакта ослаблена одной конечной или двумя полубесконечными трещинами. При помощи интегралов Фурье в биполярной системе координат через функции Попковича-Нейбера, при нетрадиционных граничных условиях на краях трещин, построено замкнутое решение этих задач.

Ключевые слова: *составное тело, трещина, биполярные координаты, функции Попковича-Нейбера, преобразование Фурье*

Введение

Исследованию контактных и смешанных задач плоской теории упругости для однородной и кусочно-однородной плоскости и полуплоскости, содержащей межфазовые дефекты типа трещин, тонких включений, стрингеров и т.д. посвящено много работ. В связи с этим укажем на монографии [1-4], где построены точные или эффективные решения ряда задач в указанной области. Отметим также работы [5-11] и приведенные там ссылки, которые тесно связаны с рассматриваемой здесь задачей. В этих работах, в рамках линейной теории упругости исследуется комплекс вопросов, связанных с более детальным изучением основных механических параметров, определяющих напряженно-деформированное состояние рассматриваемых упругих областей в целом и около особых точек – в частности.

С точки зрения исследования вышеуказанных вопросов для однородных или кусочно-однородных упругих тел, содержащих разнородные концентраторы напряжений, особое место занимают работы, в которых при линейной постановке теории упругости удается построить точное решение в квадратурах. Любое такое решение некоторой задачи независимо от принятого метода ее решения, помимо непосредственного значения этих задач, может использоваться в качестве “пробного шара” при исследовании подобных, более сложных (на различных неоднородностях) родственных задач.

Отметим, что в [8] методом комплексных потенциалов построено замкнутое решение I задачи.

Материалы и методы

Рассмотрим, отнесенную к декартовой системе координат Oxy упругую кусочно-однородную плоскость, состоящую из двух разнородных полуплоскостей $\Omega_1\left(y>0\right)$ и $\Omega_2\left(y<0\right)$ с коэффициентами Ляме G_1, ν_1 и G_2, ν_2 соответственно. При этом ось Ox направлена по линии соединения разнородных полуплоскостей. Составная плоскость по линии $y=0$ ослаблена:

– одной конечной трещиной на отрезке $L_1 = \{|x| \le a, y = 0\}$ длиной $2a$;

– двумя полубесконечными трещинами вдоль полубесконечных интервалов $L_2 = \{|x| \ge a, y = 0\}$.

Все величины, описывающие напряженное состояние верхней $(y > 0)$ и нижней $(y < 0)$ полуплоскостей снабжены индексами 1 и 2 соответственно. Для каждого из этих случаев формулируется смешанная краевая задача плоской теории упругости со следующими граничными условиями на берегах трещины:

$$I\sigma_y^{(1)}(x,+0) = p_1(x), \tau_{xy}^{(1)}(x,+0) = q_1(x), u_2(x,-0) = v_2(x,-0) = 0, x \in L_1, \quad (1)$$

$$II\sigma_y^{(1)}(x,+0) = p_2(x), \tau_{xy}^{(1)}(x,+0) = q_2(x), u_2(x,-0) = v_2(x,-0) = 0, x \in L_2, \quad (2)$$

здесь $\sigma_x^{(i)}$, $\sigma_y^{(i)}$, $\tau_{xy}^{(i)}$, u_i, v_i - компоненты напряжений и перемещений в областях $\Omega_i\,(i = 1,2)$, $p_i(x)$ и $q_i(x)\,(i = 1,2)$ заданные нагрузки на берегах трещины, удовлетворящие условиям разложимости в интегралы Фурье.

В обоих случаях предполагается, что на участках $L_2 = \{|x| \ge a, y = 0\}$ - в I задаче, $L_1 = \{|x| \le a, y = 0\}$ - в II задаче, полуплоскости контактируют в режиме полного контакта, т.е имеют место условия:

$$\begin{aligned} &\sigma_y^{(1)}(x,+0) = \sigma_y^{(2)}(x,-0); \quad \tau_{xy}^{(1)}(x,+0) = \tau_{xy}^{(2)}(x,-0) \\ &u_2(x,+0) = u_2(x,-0); \quad v_1(x,+0) = v_1(x,-0) \end{aligned} \quad (3)$$

при $x \in L_1$ в задаче I, или $x \in L_2$ в задаче II.

Кроме того, принимается, что $\{\sigma_x^{(i)},\ \sigma_y^{(i)},\ \tau_{xy}^{(i)}\ (i = 1,2)\} \to 0$ при $\sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$.

При такой постановке требуется построить замкнутое решение задачи, позволяющее легко определить основные механические характеристики рассматриваемых задач: распределение контактных напряжений и присущие им степени особенности; коэффициенты концентрации напряжений на концах трещин.

Построение решения задач, результаты

Для решения поставленных задач построим при помощи функции Папковича-Нейбера. Общее решение плоской задачи теории упругости, согласно Попковичу-Нейберу [12], представляется через три гармонические функции $\Phi_0(x,y)$, $\Phi_1(x,y)$, $\Phi_2(x,y)$, одна из которых принимается произвольной. Пользуясь этой произвольностью, $\Phi_1(x,y)$ принимаем тождественно равной нулю. Тогда перемещения $u(x,y)$, $v(x,y)$ и напряжения $\sigma_x(x,y)$, $\sigma_y(x,y)$, $\tau_{xy}(x,y)$ через функции $\Phi_0(x,y)$ и $\Phi_2(x,y)$ выражаются следующими формулами [12]:

$$
\begin{aligned}
2G\,u(x,y) &= -\frac{\partial\Phi_0(x,y)}{\partial x} - y\frac{\partial\Phi_2(x,y)}{\partial x}\\
2G\,v(x,y) &= (3-4\nu)\Phi_2(x,y) - \frac{\partial\Phi_0(x,y)}{\partial y} - y\frac{\partial\Phi_2(x,y)}{\partial y}\\
\sigma_x(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[2\nu\,\Phi_2(x,y) + \frac{\partial\Phi_0(x,y)}{\partial y}\right] - y\frac{\partial^2\Phi_2(x,y)}{\partial x^2}\\
\sigma_y(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[2(1-\nu)\Phi_2(x,y) - \frac{\partial\Phi_0(x,y)}{\partial y}\right] - y\frac{\partial^2\Phi_2(x,y)}{\partial y^2}\\
\tau_{xy}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-2\nu)\Phi_2(x,y) - \frac{\partial\Phi_0(x,y)}{\partial y} - y\frac{\partial^2\Phi_2(x,y)}{\partial y^2}\right]
\end{aligned}
\tag{4}
$$

При решении задачи будем использовать биполярные системы координат. Связь прямоугольных координат (x,y) с биполярными координатами (α,β) дается соотношениями [12]:

$$x = \frac{a\,sh\alpha}{ch\alpha + \cos\beta},\ y = \frac{a\sin\beta}{ch\alpha + \cos\beta}, \tag{5}$$

где a – размерный параметр, соответствующий в этом случае с полудлиной трещины.

Координата α будет изменяться от $-\infty$ до $+\infty$. В правой полуплоскости $\alpha > 0$, в левой - $\alpha < 0$, ось Oy является координатной линией $\alpha = 0$, точки $x = \pm a,\ y = 0$, соответствуют значениям $\alpha = \pm\infty$. Координата β меняется от $-\pi$ до π. В верхней полуплоскости $\beta > 0$, в нижней - $\beta < 0$. Отрезок $(-a,\ a)$ является координатной линией $\beta = 0$. Что касается полубесконечных частей оси Ox при $x < -a$ и $x > a$, то здесь координата β терпит разрыв, равный 2π, а именно на верхнем берегу $\beta = \pi$, на нижнем берегу $\beta = -\pi$.

Обратимся сначала к I задаче (рис.1).

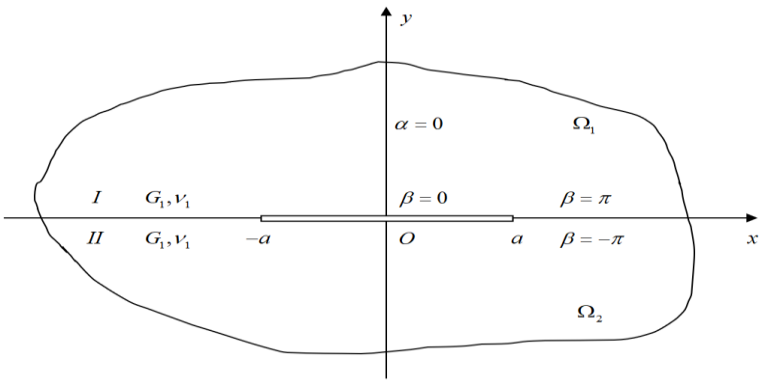

Рис. 1. Составная плоскость с конечной трещиной

Граничные условия (1) в биполярных координатах (α,β) запишутся в виде

$$\sigma_y^{(1)}(\alpha,0) = \sigma_1(\alpha), \tau_{xy}^{(1)}(\alpha,0) = \tau_1(\alpha), u_2(\alpha,0) = v_2(\alpha,0) = 0, \tag{6}$$

где $\sigma_1(\alpha) \to p_1(x)$, а контактные условия (5), отражающие условия полного контакта граничных линии Ω_1 и Ω_2 - в виде:

$$\sigma_y^{(1)}(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=\pi}=\sigma_y^{(2)}(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=-\pi},\quad \tau_{xy}^{(1)}(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=\pi}=\tau_{xy}^{(2)}(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=-\pi}$$
$$U_1(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=\pi}=U_2(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=-\pi},\quad V_1(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=\pi}=V_2(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=-\pi} \tag{7}$$

Граничные (5) и контактные (6) условия через гармонические функции $\Phi_0^{(m)}(\alpha,\beta)$ и $\Phi_2^{(m)}(\alpha,\beta)$ $(m=1,2)$ запишутся в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left[2(1-\nu_1)\Phi_2^{(1)}(\alpha,\beta)-\Phi_3^{(1)}(\alpha,\beta)\right]\Big|_{\beta=0}=\frac{a\sigma_1(\alpha)}{ch\alpha+1}$$
$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[(1-2\nu_1)\Phi_2^{(1)}(\alpha,\beta)-\Phi_3^{(1)}(\alpha,\beta)\right]\Big|_{\beta=0}=\frac{a\tau_1(\alpha)}{ch\alpha+1}$$
$$\frac{\partial\Phi_3^{(2)}(\alpha,\beta)}{\partial\beta}\Big|_{\beta=0}=0,\quad \left[(3-4\nu_2)\Phi_2^{(2)}(\alpha,\beta)-\Phi_3^{(2)}(\alpha,\beta)\right]\Big|_{\beta=0}=0$$
$$\frac{1}{G_1}\left[(3-4\nu_1)\Phi_2^{(1)}(\alpha,\beta)-\Phi_3^{(1)}(\alpha,\beta)\right]\Big|_{\beta=\pi}=\frac{1}{G_2}\left[(3-4\nu_2)\Phi_2^{(2)}(\alpha,\beta)-\Phi_3^{(2)}(\alpha,\beta)\right]\Big|_{\beta=-\pi}$$
$$\frac{1}{G_1}\frac{\partial\Phi_3^{(1)}(\alpha,\beta)}{\partial\beta}\Big|_{\beta=\pi}=\frac{1}{G_2}\frac{\partial\Phi_3^{(2)}(\alpha,\beta)}{\partial\beta}\Big|_{\beta=-\pi} \tag{8}$$
$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left[2(1-\nu_1)\Phi_2^{(1)}(\alpha,\beta)-\Phi_3^{(1)}(\alpha,\beta)\right]\Big|_{\beta=\pi}=\frac{\partial}{\partial\beta}\left[2(1-\nu_2)\Phi_2^{(2)}(\alpha,\beta)-\Phi_3^{(2)}(\alpha,\beta)\right]\Big|_{\beta=-\pi}$$
$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[(1-2\nu_1)\Phi_2^{(1)}(\alpha,\beta)-\Phi_3^{(1)}(\alpha,\beta)\right]\Big|_{\beta=\pi}=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[(1-2\nu_2)\Phi_2^{(2)}(\alpha,\beta)-\Phi_3^{(2)}(\alpha,\beta)\right]\Big|_{\beta=-\pi}$$

где

$$\Phi_3^{(m)}(x,y)=\frac{\partial\Phi_0^{(m)}(x,y)}{\partial y}\qquad (m=1,2). \tag{9}$$

Гармонические функции $\Phi_n^{(m)}(\alpha,\beta)$ $(m=1,2;\ n=2,3)$, входящие в (8), ищем в виде интегралов Фурье:

$$\Phi_n^{(m)}(\alpha,\beta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[A_n^{(m)}(\lambda)ch\lambda\beta+B_n^{(m)}(\lambda)sh\lambda\beta\right]\frac{e^{-i\lambda\alpha}}{\lambda}d\lambda, \tag{10}$$

где $A_n^{(m)}(\lambda)$ и $B_n^{(m)}(\lambda)$ - неизвестные постоянные интегрирования.

Подставляя (10) в (8), приходим к системе из 8 алгебраических уравнений относительно величин $A_n^{(m)}(\lambda)$ и $B_n^{(m)}(\lambda)$ $(m=1,2;\ n=2,3)$, правые части которых будут содержать преобразование Фурье от заданных функций $p(x)$ и $q(x)$.

После решения системы (8) получаем следующие значения для неизвестных величин интегрирования:

$$
\begin{aligned}
&A_2^{(1)}(\lambda)=\frac{\chi_2-1}{2}A_2^{(2)}(\lambda)+\frac{\chi_2+1}{2}B_2^{(2)}(\lambda)cth\lambda\pi-\bar{\sigma}_1(\lambda)cth\lambda\pi-\bar{\tau}_1(\lambda)\\
&B_2^{(1)}(\lambda)=\frac{\chi_2+1}{2}A_2^{(2)}(\lambda)cth\lambda\pi+\frac{\chi_2-1}{2}B_2^{(2)}(\lambda)-\bar{\tau}_1(\lambda)cth\lambda\pi-\bar{\sigma}_1(\lambda)\\
&A_3^{(1)}(\lambda)=\frac{\chi_1-1}{2}A_2^{(1)}(\lambda)-\bar{\tau}_1(\lambda)\\
&B_3^{(1)}(\lambda)=\frac{\chi_1+1}{2}B_2^{(1)}(\lambda)-\bar{\sigma}_1(\lambda)\\
&A_3^{(2)}(\lambda)=\chi_2A_2^{(2)}(\lambda);\quad B_3^{(2)}(\lambda)=0\\
&A_2^{(2)}(\lambda)=\frac{\Delta_1(\lambda)}{\Delta(\lambda)};\quad B_2^{(2)}(\lambda)=\frac{\Delta_2(\lambda)}{\Delta(\lambda)}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\Delta(\lambda)=h_1^2(\lambda)-h_2^2(\lambda)\\
&\Delta_1(\lambda)=-2(\chi_1+1)\left[\bar{\tau}_1(\lambda)h_1(\lambda)+\bar{\sigma}_1(\lambda)h_2(\lambda)\right]\\
&\Delta_2(\lambda)=+2(\chi_1+1)\left[\bar{\tau}_1(\lambda)h_2(\lambda)+\bar{\sigma}_1(\lambda)h_1(\lambda)\right]\\
&h_1(\lambda)=(\chi_1\chi_2+2\mu\chi_2+1)ch2\lambda\pi+\chi_1+\chi_2-2\mu\chi_2\\
&h_2(\lambda)=(\chi_1\chi_2-1)sh2\lambda\pi
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$$
\bar{\tau}_1(\lambda)=\frac{ia}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau_1(\alpha)e^{i\lambda\alpha}}{ch\alpha+1}d\alpha,\quad \bar{\sigma}_1(\lambda)=\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma_1(\alpha)e^{i\lambda\alpha}}{ch\alpha+1}d\alpha, \tag{13}
$$

$$
\mu=\frac{G_1}{G_2};\chi_m=3-4\nu_m(m=1,2). \tag{14}
$$

Обратимся теперь ко второму варианту рассматриваемой задачи, когда составная плоскость ослаблена двумя полубесконечными трещинами (рис.2).

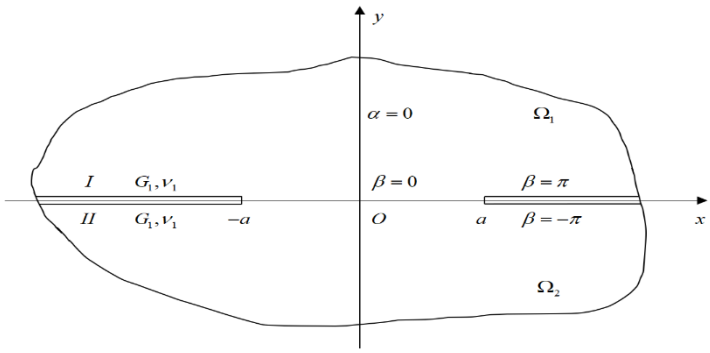

Рис. 2 Составная плоскость с двумя полубесконечными трещинами

Граничные (2) и контактные (3) условия запишутся в виде:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_y^{(1)}(\alpha,\pi)=\sigma_1(\alpha);\quad \tau_{xy}^{(1)}(\alpha,\pi)=\tau_1(\alpha);\quad u_2(\alpha,-\pi)=v_2(\alpha,-\pi)=0\\
&\sigma_y^{(1)}(\alpha,0)=\sigma_y^{(2)}(\alpha,0);\qquad \tau_{xy}^{(1)}(\alpha,0)=\tau_{xy}^{(2)}(\alpha,0)\\
&u_1(\alpha,0)=u_2(\alpha,0);\qquad v_1(\alpha,0)=v_2(\alpha,0)
\end{aligned}
\tag{15}
$$

В этом случае гармонические функции $\Phi_n^{(m)}(\alpha,\beta)$ $(m=1,2;\ n=2,3)$ ищутся в виде интегралов Фурье:

$$\Phi_n^{(m)}(\alpha,\beta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[A_n^{(m)}(\lambda)ch\lambda\left(\pi+(-1)^m\beta\right)+B_n^{(m)}(\lambda)sh\lambda\left(\pi+(-1)^m\beta\right)\right]\frac{e^{-i\lambda\alpha}}{\lambda}d\lambda. \quad (16)$$

Как и в первом случае, после удовлетворения краевых и контактных условий (15), для неизвестных постоянных интегрирования $A_n^{(m)}(\lambda)$ и $B_n^{(m)}(\lambda)$ $(m=1,2;\ n=2,3)$ получается точно совпадающая с (10) система уравнений. Однако, в этом случае, $\bar{\tau}_1(\lambda)$ и $\bar{\sigma}_1(\lambda)$ из (13) даются следующими формулами:

$$\bar{\tau}_1(\lambda)=-\frac{ia}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau_1(\alpha)e^{i\lambda\alpha}}{ch\alpha-1}d\alpha;\quad \bar{\sigma}_1(\lambda)=\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma_1(\alpha)e^{i\lambda\alpha}}{ch\alpha-1}d\alpha\ . \quad (17)$$

Определяя неизвестные $A_n^{(m)}(\lambda)$ и $B_n^{(m)}(\lambda)$ при помощи (11) - (14) для определения контактных нормальных и касательных напряжений получим следующие формулы:

$$\begin{aligned}\sigma_y^{(1)}(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=\pi}=\sigma_y^{(2)}(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=-\pi}&=-\frac{ch\alpha-1}{a}\cdot\frac{\chi_1+1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\{(\chi_2+1)\left[\bar{\tau}_1(\lambda)h_2(\lambda)+\bar{\sigma}_1(\lambda)h_1(\lambda)\right]ch\lambda\pi-\\&-(\chi_2-1)\left[\bar{\tau}_1(\lambda)h_1(\lambda)+\bar{\sigma}_1(\lambda)h_2(\lambda)\right]sh\lambda\pi\}\frac{e^{-i\lambda\alpha}}{\Delta(\lambda)}d\lambda\\ \tau_{xy}^{(1)}(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=\pi}=\tau_{xy}^{(2)}(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=-\pi}&=-\frac{ch\alpha-1}{a}\cdot\frac{i(\chi_1+1)}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\{(\chi_2-1)\left[\bar{\tau}_1(\lambda)h_2(\lambda)+\bar{\sigma}_1(\lambda)h_1(\lambda)\right]sh\lambda\pi-\\&-(\chi_2+1)\left[\bar{\tau}_1(\lambda)h_1(\lambda)+\bar{\sigma}_1(\lambda)h_2(\lambda)\right]ch\lambda\pi\}\frac{e^{-i\lambda\alpha}}{\Delta(\lambda)}d\lambda\end{aligned} \quad (18)$$

Отметим, что в (18) $\bar{\tau}_1(\lambda)$ и $\bar{\sigma}_1(\lambda)$ следует использовать формулы (13) для задачи I, и формулы (17) при задаче II.

Результаты и обсуждение

Исследование интегралов, входящих в (18), показывает, что на концах контактных участков, т.е. в точках $x=+a\pm0,\ x=-a\pm0$ контакты напряжения имеют особенности, степень которых определяется из условия $\Delta(\lambda)=0$. Для корней $\Delta(\lambda)=0$ получается

$$\lambda=\pm\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\mu\chi_2+1}{\chi_2(\chi_2+\mu)}\pm\frac{i}{2\pi}\arccos\frac{2\mu\chi_2-\chi_1-\chi_2}{2\sqrt{\chi_2(\chi_1+\mu)(\mu\chi_2+1)}}+2i\pi k\cdot \quad (19)$$

А для степени особенности на концах трещин имеем

$$r=1-\frac{1}{2\pi}\arccos\frac{\chi_2(2\mu-1)-\chi_1}{2\sqrt{\chi_2(\chi_1+\mu)(\mu\chi_2+1)}}\cdot \quad (20)$$

В заключении рассмотрим частный случай поставленных выше задач, когда материал однородный $\mu=1,\ \chi_1=\chi_2=\chi$ и усилия приложены к берегам трещин заданы к сосредоточенным силам величин P, приложены в точке $y=0,\ \ x=b$ в первом случае $|b|<a\ \left(b=ath\frac{\alpha_0}{2}\right)$ или $|b|>a\ \left(b=acth\frac{\alpha_0}{2}\right)$ - во втором случае.

Вычислим нормальные и касательные напряжения на защемленном крае.

В первом случае получаем

$$\sigma_y^{(2)}(\alpha,0)=-H(x)\cos(\alpha-\alpha_0)\theta;\quad \tau_{xy}^{(2)}(\alpha,0)=H(x)\sin(\alpha-\alpha_0)\theta;\quad (-\infty<\alpha<\infty)\ . \tag{21}$$

Во втором случае имеем следующие значения:

$$\sigma_y^{(2)}(\alpha,-\pi)=H_1(x)\cos(\alpha-\alpha_0)\theta;\ \tau_{xy}^{(2)}(\alpha,-\pi)=H_1(x)\sin(\alpha-\alpha_0)\theta;\ (-\infty<\alpha<\infty), \tag{22}$$

где

$$\begin{gathered}
H(x)=\frac{(\chi+1)P\sqrt{n}}{4\pi\sqrt{\chi}}\cdot\frac{\sqrt{(a+m)(a+n)}+\sqrt{(a-m)(a-n)}}{m^{3/2}(m+n)}\\
H_1(x)=-\frac{(\chi+1)Pa\sqrt{n_1}}{4\pi\sqrt{\chi}}\cdot\frac{\sqrt{(x+m)(b+n_1)}+\sqrt{(x-m_1)(b-n_1)}}{m_1^{3/2}(xn_1+bm_1)}\\
ch2\pi\theta=\frac{\chi+1}{2\chi};\quad \theta=\frac{1}{4\pi}\ln\chi;\quad \alpha-\alpha_0=\ln\left|\frac{(a+x)(a-b)}{(a-x)(a+b)}\right|\\
m=\sqrt{a^2-x^2},\quad n=\sqrt{a^2-b^2};\quad m_1=\sqrt{x^2-a^2},\quad n_1=\sqrt{b^2-a^2}
\end{gathered} \tag{23}$$

На линии контакта, $x\in(-a,a)$ в I случае и $x\in|x|>a$ во II случае для контактных напряжений имеем следующие представления.

В первом случае:

$$\begin{gathered}
\sigma_y^{(1)}(\alpha,\pi)=\sigma_y^{(2)}(\alpha,-\pi)=D_1\cdot\frac{\sqrt{|x|+\sqrt{x^2-a^2}}}{|x|\left(x^2-a^2\right)^{3/4}};\qquad |x|>a\\
\tau_{xy}^{(1)}(\alpha,\pi)=\tau_{xy}^{(2)}(\alpha,-\pi)=-D_2\cdot\frac{\sqrt{|x|+\sqrt{x^2-a^2}}}{|x|\left(x^2-a^2\right)^{3/4}};\qquad |x|>a
\end{gathered} \tag{24}$$

а во втором случае:

$$\begin{gathered}
\sigma_y^{(1)}(\alpha,0)=\sigma_y^{(2)}(\alpha,0)=D_1\cdot\frac{\sqrt{a+\sqrt{a^2-x^2}}}{\left(a^2-x^2\right)^{3/4}};\qquad |x|<a\\
\tau_{xy}^{(1)}(\alpha,0)=\tau_{xy}^{(2)}(\alpha,0)=D_2\cdot\frac{\sqrt{a+\sqrt{a^2-x^2}}}{\left(a^2-x^2\right)^{3/4}};\qquad x<a
\end{gathered} \tag{25}$$

где

$$\begin{gathered}
D_1=\frac{PaK_0^*\left[\left(\chi^2+1\right)K_2^*+2\chi K_3^*\right]}{2\pi\left(\chi^2-1\right)}\\
D_2=\frac{PaK_0^*K_1^*}{2\pi}\\
K_1^*=ch\pi\theta\sin(\alpha-\alpha_0)\theta-th\frac{\alpha-\alpha_0}{4}sh\pi\theta\cos(\alpha-\alpha_0)\theta\\
K_2^*=sh\pi\theta\cos(\alpha-\alpha_0)\theta+th\frac{\alpha-\alpha_0}{4}ch\pi\theta\sin(\alpha-\alpha_0)\theta\\
K_3^*=ch3\pi\theta\sin(\alpha-\alpha_0)\theta-th\frac{\alpha-\alpha_0}{4}sh3\pi\theta\cos(\alpha-\alpha_0)\theta\\
K_0^*=\frac{ch\frac{\alpha_0}{4}-th\frac{\alpha}{4}sh\frac{\alpha_0}{4}}{ch\frac{\alpha_0}{2}-th\frac{\alpha}{2}sh\frac{\alpha_0}{2}}=\frac{ch\frac{\alpha-\alpha_0}{4}}{ch\frac{\alpha-\alpha_0}{2}}\cdot\frac{ch\frac{\alpha}{2}}{ch\frac{\alpha}{4}}
\end{gathered} \tag{26}$$

Из (15) - (23) видно, что в концах жестко защемленных берегов трещин нормальные и касательные напряжения имеют степенную особенность порядка 3/4 с осцилирующими множителями $\cos(\alpha-\alpha_0)\theta$ и $\sin(\alpha-\alpha_0)\theta$, совпадающую с ранее полученными, другими путями, результатами [8].

На табл. 1, 2, 3 приведены значения степенных особенностей при некоторых значениях ν_1, ν_2 и μ.

Таблица 1

Значения степенных особенностей при $\nu_1 = 0{,}15$

ν_2 \ μ	0,2	0,25	0,5	1	2	4	5
0,15	0,641	0,654	0,7	0,75	0,8	0,845	0,859
0,25	0,633	0,647	0,693	0,743	0,794	0,84	0,855
0,35	0,623	0,636	0,682	0,733	0,785	0,834	0,849

Таблица 2

Значения степенных особенностей при $\nu_1 = 0{,}25$

ν_2 \ μ	0,2	0,25	0,5	1	2	4	5
0,15	0,644	0,658	0,706	0,756	0,807	0,852	0,865
0,25	0,638	0,652	0,699	0,75	0,801	0,848	0,861
0,35	0,629	0,643	0,689	0,741	0,793	0,842	0,856

Таблица 3

Значения степенных особенностей при $\nu_1 = 0{,}35$

ν_2 \ μ	0,2	0,25	0,5	1	2	4	5
0,15	0,647	0,662	0,711	0,764	0,815	0,86	0,873
0,25	0,643	0,657	0,705	0,758	0,81	0,856	0,869
0,35	0,636	0,65	0,697	0,75	0,803	0,85	0,864

Заключение

В рамках плоской теории упругости в биполярной системе координат построено еще одно точное решение для составной плоскости, состоящей из двух полуплоскостей с различными упругими параметрами, ослабленной межфазовым одним конечным или двумя полубесконечными трещинами. В обоих случаях на берегах трещин заданы смешанные граничные условия.

При смешанных граничных условиях на краях трещин решение задачи в обоих случаях сводится к одинаковой системе уравнений. Получены явные, простые формулы как для определения контактных напряжений в контактных зонах, а также показателя степени особенности, присущие контактным напряжениям на концевых точках трещин. При помощи этих формул определяются, как в рассматриваемом частном случае, коэффициенты интенсивности контактных напряжений. Полученное здесь точное решение может с успехом использовано для проверки и оценки окончательных результатов полуразличными численными методами родственных, более сложных задач.

Список летературы

[1] **Г.Я. Попов,** Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подключений, Наука, Москва, 1982, 344с.

[2] **Г.П. Черепанов,** Механика разрушения композиционных материалов, Наука, Москва, 1983, 296 с.

[3] **В.Н. Акопян,** Об одной смешанной задаче для составной плоскости, ослабленной трещиной, Изв. НАН РА, Механика 48(4) (1995) 57-65.

[4] **Л.Л. Даштоян,** Об одной смешанной задаче для составной плоскости, с двумя полубесконечными трещинами, Мат. XII респуб. конф. мол.уч. Механика, Ереван, 2003, с. 75-82.

[5] **В.Н. Акопян,** Смешанные граничные задачи взаимодействия сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Изд. “Гитутюн” НАН, Ереван, 2014, 322 с.

[6] **В.Н. Акопян, А.А. Григорян,** Антиплоское напряженное состояние равномерно кусочно-однородного пространства с периодической системой параллельных полубесконечных межфазных трещин, Journal of Physics: Conference Series 1474 (2020), Available from: https://iopscience.iop.org/issue/1742-6596/1474/1.

[7] **В.Н. Акопян, А.А. Амирджанян, Л.Л. Даштоян,** Плоско-деформированное состояние упругой составной плоскости с межфазными трещинами и включениями под воздействием динамических нагрузок, Известия НАН РА, Механика 73(3) (2020) 3-23.

[8] **V.N. Hakobyan,** Stress Concentrators in Continuous Deformable Bodies, Advanced Structured Materials, Vol.181, Springer, 2022, 397 p.

[9] **В.Н. Акопян, А.А. Амирджанян, Л.В. Акопян,** Контактная задача для составной плоскости с разрезом, Известия НАН РА, Механика 72(1-2) (2022) 17-26.

[10] **V.N. Hakobyan, L.V. Hakobyan, L.L. Dashtoyan,** Contact problem for a piecewise-homogeneous plane with an interfacial crack under dry friction, Journal of Physics: Conference Series 2231 (2022) 012024.

[11] **П.В. Агабекян, Л.А. Арутюнян,** Плоская задача теории упругости для составной плоскости с трещинами, Известия НАН РА, Механика 76(2) (2023) 11-19.

[12] **Я.С. Уфлянд,** Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Наука, Ленинград, 1968, 401 с.

ԽԱՌԸ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՎ ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ ԽՆԴԻՐ

Լևոն Արսենի Հարությունյան[1], Վահե Գրիշայի Զաքարյան[1*], Անգին Վիկտորի Մարտիրոսյան[2]

[1]Մեխանիկայի ինստիտուտ ԳԱԱ, ք. Երևան, ՀՀ

[2]Ճարտարապետության և շինարարության Հայաստանի ազգային համալսարան, ք. Երևան, ՀՀ

**vahe-zaqaryan@mail.ru*

Դիտարկվում են տարբեր առաձգական հատկություններ ունեցող կիսահարթություններից կազմված բաղադրյալ հարթության համար հարթ կոնտակտային խնդիրներ, երբ կիսահարթությունների միացման գծի երկայնքով բաղադրյալ հարթությունը թուլացված է մեկ վերջավոր կամ երկու կիսաանվերջ ճաքերով: Պոպկովիչ-Նեյբերի հարմոնիկ ֆունկցիաների օգնությամբ ճաքերի

ափերի վրա տրված խառը եզրային պայմանների դեպքում, երկբևեռ կոորդինատային համակարգում կառուցվում է դրված խնդիրների փակ լուծումները Ֆուրյեի ինտեգրալների տեսքով:

Բանալի բառեր. *բաղադրյալ մարմին, ճաքեր, երկբևեռ կոորդինատներ, Պոպկովիչ-Նեյբերի ֆունկցիաներ, Ֆուրյեի ձևափոխություններ*

PLANE PROBLEM FOR A COMPOSITE PLANE WITH MIXED CONDITIONS

Levon Harutyunyan[1], Vahe Zakaryan[1*], Angin Martirosyan[2]

[1]*Institute of Mechanics NAS, Yerevan, RA,*

[2]*National University of Architecture and Construction of Armenia, Yerevan, RA,*

[*]*vahe-zaqaryan@mail.ru*

The two – dimensional problem of the theory of elasticity for compound plane consisting of two half-plane is considered with different elastic characteristic and existing between them finite cracks or semi-infinite cracks. Due to Fourier integral in bipolar system of coordinates the problem are solved closed with the help of Papkovich-Neuber function.

Keywords: *composite body, crack, bipolar coordinates, Papkovich-Neuber functions, Fourier transformation.*

Հարությունյան Լևոն Արսենի, ֆ.մ.գ.թ. *(ՀՀ, ք. Երևան) - ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտ, գիտաշխատող, (+374)99675747, arutyunyanlevon@gmail.com,* ***Զաքարյան Վահե Գրիշայի, ֆ.մ.գ.թ.*** *(ՀՀ, ք. Երևան) - ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտ, գիտաշխատող, (+374)77789264, vahe-zaqaryan@mail.ru,* ***Մարտիրոսյան Անգին Վիկտորի, տ.գ.թ., դոցենտ*** *(ՀՀ, ք. Երևան) - ՃՇՀԱՀ, Մաթեմատիկայի, շինարարական մեխանիկայի և ֆիզիկայի դեպարտամենտ, (+374)94762396, angin84@mail.ru*

Арутюнян Левон Арсенович, к.ф.м.н. *(РА, г. Ереван) - Институт механики НАН, научный сотрудник, (+374)99675747, arutyunyanlevon@gmail.com,* ***Закарян Ваге Гришаевич, к.ф.м.н.*** *(РА, г. Ереван) - Институт механики НАН, научный сотрудник, (+374)77789264, vahe-zaqaryan@mail.ru,* ***Мартиросян Ангин Викторовна, к.т.н., доцент*** *(РА, г. Ереван) - НУАСА, департамент Математики, строительной механики и физики, (+374)94762396, angin84@mail.ru*

Harutyunyan Levon, doctor of philosophy (Ph.D) in Physics *(RA, Yerevan) - Institute of Mechanics of NAS RA, researcher, (+374)99675747, arutyunyanlevon@gmail.com,* ***Zakaryan Vahe, doctor of philosophy (Ph.D) in Physics*** *(RA, Yerevan) - Institute of Mechanics of NAS RA, researcher, (+374)77789264, vahe-zaqaryan@mail.ru,* ***Martirosyan Angin, doctor of philosoph (Ph.D) in Engineering****,* ***Associate Professor*** *(RA, Yerevan) - NUACA, Department of Mathematics, Structural Mechanics and Physics, (+374)94762396, angin84@mail.ru*

Ներկայացվել է՝ 27.09.2024թ.

Գրախոսվել է՝ 30.11.2024թ.

Ընդունվել է տպագրության՝ 25.12.2024թ.